Prof. Dr. Alfred Toth

# Permutationen und relationale Klammerungen

1. Wir kommen hier ein weiteres Mal auf Benses Feststellung zurück, die triadische Peircesche Zeichenrelation sei eine Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation, so zwar, dass die monadische in der dyadischen und beide in der triadischen Relation eingeschlossen sei (Bense 1979, S. 53, 67).

2. Obwohl Bense als Grundform die folgende Struktur der Peirceschen triadischen Relation angibt (1979, S. 67)

$ZR1 = ((M), ((M \rightarrow O), (O \rightarrow I)))$,

werden die Zeichenklassen (aufgrund einer falsch angewendeten „pragmatischen Maxime", herausgelesen aus Peirce) wie folgt konstruiert:

$\times ZR1 = \times((M), ((M \rightarrow O), (O \rightarrow I))) = (((I \rightarrow O), (O \rightarrow M), (M))$,

d.h. zuerst wird I auf O und dann O auf M abgebildet, und zwar ist dies deshalb möglich, weil wegen der transitiven Inklusion von ZR ja $O \supset M$ gilt, so dass also die trichotomischen Werte von M direkt nur von O, nicht von I abhängen.

3. Nun ist es aber so, dass es, entsprechend den 6 möglichen Permutationen einer triadischen Relation, auch 6 mögliche relationale Klammerungen für inklusive Relationen gibt, die leider in der Semiotik, von meinem eigenen jüngeren Arbeiten abgesehen (vgl. Toth 2009a, b), ganz übersehen wurden:

$ZR1 = ((M), ((M \rightarrow O), (O \rightarrow I)))$
$\times ZR1 = \times((M), ((M \rightarrow O), (O \rightarrow I))) = (((I \rightarrow O), (O \rightarrow M)), (M))$

$ZR2 = ((M), ((O \rightarrow I), (M \rightarrow O)))$
$\times ZR2 = ((M), ((O \rightarrow I), (M \rightarrow O))) = (((O \rightarrow M), (I \rightarrow O)), (M))$

$ZR3 = ((O \rightarrow I), ((M), (M \rightarrow O)))$
$\times ZR3 = ((O \rightarrow I), ((M), (M \rightarrow O))) = (((O \rightarrow M), (M)), (I \rightarrow O))$

ZR4 = ((O → I), ((M → O), (M)))
× ZR4 = ((O → I), ((M → O), (M)) = (((M), (O → M)), (I → O))

ZR5 = ((M → O), ((M), (O → I)))
× ZR5 = ((M → O), ((M), (O → I))) = (((I → O), (M)), (O → M))

ZR6 = ((M → O), ((O → I), (M)))
× ZR6 = ((M → O), ((O → I), (M))) = (((M), (I → O)), (O → M))

4. Wenn wir nun über den 6 Ordnungsrelationen die entsprechenden Zeichenklassen (und Realitätsthematiken) konstruieren, bekommen wir folgende Schemata:

1. OR1 = (((I → O), (O → M)), (M))
   Zkl1 = (3.a 2.b 1.c)

2. OR2 = (((O → M), (I → O)), (M))
   Zkl2 = (2.b 3.a 1.c)

3. OR3 = (((O → M), (M)), (I → O))
   Zkl3 = (2.b 1.c 3.a)

4. OR4 = (((M), (O → M)), (I → O))
   Zkl4 = (1.c 2.b 3.a)

5. OR5 = (((I → O), (M)), (O → M))
   Zkl5 = (3.a 1.c 2.b)

6. OR6 = (((M), (I → O)), (O → M))
   Zkl6 = (1.c 3.a 2.b)

5. Für all diejenigen, denen nicht klar geworden ist, worum es hier geht: Nimmt man eine gewöhnliche Peircesche Zkl1, z.B. (3.1 2.1 1.3) und permutiert sie auf alle 6 möglichen Weisen, d.h.

(3.1 2.1 1.3)
(3.1 1.3 2.1)
(2.1 3.1 1.3)
(2.1 1.3 3.1)

(1.3 3.1 2.1)
(1.3 2.1 3.1),

bleibt die in Zkl1 definierte relationale Klammerung bestehen. Es kommt also nicht viel Wesentlich neues heraus. Passt man hingegen die Klammerung an und bildet z.B. von (2.1 3.1 1.3) aus auf dem dieser Permutation zugrunde liegenden Ordnungsschema (2.b 3.a 1.c) Zeichenklassen, erhält man z.B.

(2.1 3.1 1.1)
(2.1 3.1 1.2)
(2.1 3.1 1.c)

(2.1 3.2 1.2)
(2.1 3.2 1.3)
(2.1 3.3 1.3), usw.,

d.h. man erhält bereits hier nach der ersten Trichotomischen Triaden eine neue Trichotomische Triade, die über Zkl1 bzw. dessen Ordnung (3.a 2.b 1.c) mit a ≤ b ≤ c nicht definiert ist, d.h. aus „irregulären“ Zeichenklassen zusammengesetzt sind (sofern sie der Ordnung von Zkl1 angepasst werden: *(3.2 2.1 1.2), *(3.2 2.1 1.3), *(3.3 2.1 1.3), usw.).

6. Die Permutation nicht nur der Subzeichen, sondern auch der relationen Klammerung – und damit der Ordnung über der Menge der Fundamentalkategorien – erzeugt also jedesmal ein völlig neues System von 10 Dualystemen, das nicht mit dem ursprünglichen Peirceschen Dualsystem übereinstimmt. Würde man, wozu es gute Gründe gibt, zusätzlich die Inklusionsordnungen

2. (b ≤ a ≤ c)
3. (b ≤ c ≤ a)
4. (c ≤ b ≤ a)
5. (a ≤ c ≤ b)
6. (c ≤ a ≤ b)

aufheben, erhielte ja sogar 1 mal 10 plus 5 mal 27 verschiedene Dualsysteme. Wir halten hier aber vorläufig an den Inklusionsordnungen fest und geben die Übersicht über die neu gewonnenen Dualsysteme, die das semiotische Organon ganz gewiss enorm bereichern.

6.1. Zkl1 = (3.a 2.b 1.c) × (c.1 b.2 a.3) = Rth1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6.1.1. | (3.1 2.1 1.1) | × | (1.1 1.2 1.3) |
| 6.1.2. | (3.1 2.1 1.2) | × | (2.1 1.2 1.3) |
| 6.1.3. | (3.1 2.1 1.3) | × | (3.1 1.2 1.3) |
| 6.1.4. | (3.1 2.2 1.2) | × | (2.1 2.2 1.3) |
| 6.1.5. | (3.1 2.2 1.3) | × | (3.1 2.2 1.3) |
| 6.1.6. | (3.1 2.3 1.3) | × | (3.1 3.2 1.3) |
| 6.1.7. | (3.2 2.2 1.2) | × | (2.1 2.2 2.3) |
| 6.1.8. | (3.2 2.2 1.3) | × | (3.1 2.2 2.3) |
| 6.1.9. | (3.2 2.3 1.3) | × | (3.1 3.2 2.3) |
| 6.1.10. | (3.3 2.3 1.3) | × | (3.1 3.2 3.3) |

6.2. Zkl2 = (2.b 3.a 1.c) × (c.1 a.3 b.2) = Rth2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6.2.1. | (2.1 3.1 1.1) | × | (1.1 1.3 1.2) |
| 6.2.2. | (2.1 3.1 1.2) | × | (2.1 1.3 1.2) |
| 6.2.3. | (2.1 3.1 1.3) | × | (3.1 1.3 1.2) |
| 6.2.4. | (2.1 3.2 1.2) | × | (2.1 2.3 1.2) |
| 6.2.5. | (2.1 3.2 1.3) | × | (3.1 2.3 1.2) |
| 6.2.6. | (2.1 3.3 1.3) | × | (3.1 3.3 1.2) |
| 6.2.7. | (2.2 3.2 1.2) | × | (2.1 2.3 2.2) |
| 6.2.8. | (2.2 3.2 1.3) | × | (3.1 2.3 2.2) |
| 6.2.9. | (2.2 3.3 1.3) | × | (3.1 3.3 2.2) |
| 6.2.10. | (2.3 2.3 1.3) | × | (3.1 3.2 3.2) |

6.3. Zkl3 = (2.b 1.c 3.a) × (a.3 c.1 b.2) = Rth3

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6.3.1. | (2.1 1.1 3.1) | × | (1.3 1.1 1.2) |
| 6.3.2. | (2.1 1.1 3.2) | × | (2.3 1.1 1.2) |
| 6.3.3. | (2.1 1.1 3.3) | × | (3.3 1.1 1.2) |
| 6.3.4. | (2.1 1.2 3.2) | × | (2.3 2.1 1.2) |
| 6.3.5. | (2.1 1.2 3.3) | × | (3.3 2.1 1.2) |
| 6.3.6. | (2.1 1.3 3.3) | × | (3.3 3.1 1.2) |
| 6.3.7. | (2.2 1.2 3.2) | × | (2.3 2.1 2.2) |
| 6.3.8. | (2.2 1.2 3.3) | × | (3.3 2.1 2.2) |
| 6.3.9. | (2.2 1.3 3.3) | × | (3.3 3.1 2.2) |

6.3.10. (2.3 1.3 3.3) × (3.3 3.1 3.2)

6.4. Zkl4 = (1.c 2.b 3.a) × (a.3 b.2 c.1) = Rth4

6.4.1. (1.1 2.1 3.1) × (1.3 1.2 1.1)
6.4.2. (1.1 2.1 3.2) × (2.3 1.2 1.1)
6.4.3. (1.1 2.1 3.3) × (3.3 1.2 1.1)
6.4.4. (1.1 2.2 3.2) × (2.3 2.2 1.1)
6.4.5. (1.1 2.2 3.3) × (3.3 2.2 1.1)
6.4.6. (1.1 2.3 3.3) × (3.3 3.2 1.1)
6.4.7. (1.2 2.2 3.2) × (2.3 2.2 2.1)
6.4.8. (1.2 2.2 3.3) × (3.3 2.2 2.1)
6.4.9. (1.2 2.3 3.3) × (3.3 3.2 2.1)
6.4.10. (1.3 2.3 3.3) × (3.3 3.2 3.1)

6.5. Zkl5 = (3.a 1.c 2.b) × (b.2 c.1 a.3) = Rth5

6.5.1. (3.1 1.1 2.1) × (1.2 1.1 1.3)
6.5.2. (3.1 1.1 2.2) × (2.2 1.1 1.3)
6.5.3. (3.1 1.1 2.3) × (3.2 1.1 1.3)
6.5.4. (3.1 1.2 2.2) × (2.2 2.1 1.3)
6.5.5. (3.1 1.2 2.3) × (3.2 2.1 1.3)
6.5.6. (3.1 1.3 2.3) × (3.2 3.1 1.3)
6.5.7. (3.2 1.2 2.2) × (2.2 2.1 2.3)
6.5.8. (3.2 1.2 2.3) × (3.2 2.1 2.3)
6.5.9. (3.2 1.3 2.3) × (3.2 3.1 2.3)
6.5.10. (3.3 1.3 2.3) × (3.2 3.1 3.3)

6.6. Zkl6 = (1.c 3.a 2.b)

6.6.1. (1.1 3.1 2.1) × (1.2 1.3 1.1)
6.6.2. (1.1 3.1 2.2) × (2.2 1.3 1.1)
6.6.3. (1.1 3.1 2.3) × (3.2 1.3 1.1)
6.6.4. (1.1 3.2 2.2) × (2.2 2.3 1.1)
6.6.5. (1.1 3.2 2.3) × (3.2 2.3 1.1)
6.6.6. (1.1 3.3 2.3) × (3.2 3.3 1.1)
6.6.7. (1.2 3.2 2.2) × (2.2 2.3 2.1)

6.6.8. (1.2 3.2 2.3) × (3.2 2.3 2.1)
6.6.9. (1.2 3.3 2.3) × (3.2 3.3 2.1)
6.6.10. (1.3 3.3 2.3) × (3.2 3.3 3.1)

Man bemerkt, dass man erst jetzt alle theoretischen Möglichkeiten der Definition einer triadischen Relation als „Verschachtelung“ über einer monadische, einer dyadischen und einer triadischen Relation ausgenutzt hat. Am besten sieht man dies auch an den durch die Realitätsthematiken thematisierten strukturellen Realitäten. Findet sich z.B. im Peirceschen Zehnersystem unter dem M-them. O einzig

(2.1 $\underline{1.2\ 1.3}$) (6.1.2)

so haben wir jetzt dank der übrigen 5 Systeme zusaätzlich

(2.1 $\underline{1.3\ 1.2}$) (6.2.2.)

(2.3 $\underline{1.1\ 1.2}$) (6.3.2.)
(2.3 $\underline{1.2\ 1.1}$) (6.4.2.)

(2.2 $\underline{1.1\ 1.3}$) (6.5.2.)
(2.2 $\underline{1.3\ 1.1}$) (6.6.2.),

d.h. die in Zkl1 fehlenden Thematisate des vollständigen Objektbezuges. Bemerkenswerterweise geht diese Vervollständigung der thematisierten Subzeichen einher mit einer Vervollständigung der trichotomischen Stellenwerte der thematisierenden Subzeichen, denn wir haben ja

$(2.\underline{1}) \leftarrow (1.\underline{2}\ 1.\underline{3})$
$(2.\underline{2}) \leftarrow (1.\underline{1}\ 1.\underline{3})/(1.\underline{3}\ 1.\underline{1})$
$(2.\underline{3}) \leftarrow (1.\underline{1}\ 1.\underline{2})/(1.\underline{2}\ 1.\underline{1})$.

**Bibliographie**

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979
Toth, Alfred, Die semiotischen “Schachtelrealitäten”. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009)
Toth, Alfred, Zu welchem semiotischen System führt die Vereinigung der vier verschachtelten Dualsysteme? In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009) 29.10.2009